UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
Curso de Nivelación 2014

MATEMÁTICA

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

CURSO DE MATEMÁTICA EN LÍNEA

Contenido

UNIDAD 2. GEOMETRÍA 1
ÁNGULO 1
MEDIDA DE ÁNGULOS 1
EL SISTEMA SEXAGESIMAL 1
SISTEMA CIRCULAR 3
ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE 8
RECTAS PARALELAS 9
RECTAS PERPENDICULARES 10
PARALELAS CORTADAS POR UNA RECTA SECANTE 10
PERÍMETROS (P) 12

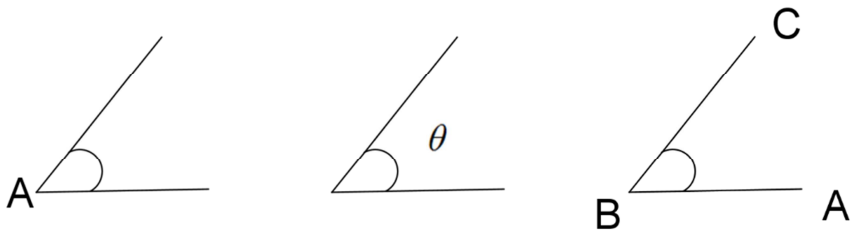
Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

UNIDAD 2. GEOMETRÍA

La geometría es una herramienta muy utilizada por el ingeniero o el arquitecto. Por lo tanto los estudiaremos: Ángulos, rectas, polígonos regulares, círculo, trapecios, etc.

ÁNGULO

Es la abertura formada por dos semi-rectas que parten de un mismo punto. Las dos semi-rectas se llaman lados del ángulo, y su intersección, vértice.



$\measuredangle$ A $\qquad$ $\measuredangle\,\theta$ $\qquad$ $\measuredangle$ ABC

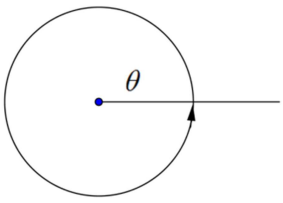
En la tercera notación $(\measuredangle \text{ ABC})$, la letra del vértice es la que queda entre las otras dos.

MEDIDA DE ÁNGULOS

Para medir un ángulo se utiliza a menudo, el sistema sexagesimal y el sistema circular.

EL SISTEMA SEXAGESIMAL

En este sistema, el ángulo de una vuelta se divide en 360° partes iguales, cada una de las clases se le llama grado sexagesimal.



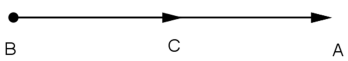
Cada grado se divide en 60 partes iguales, llamadas minutos, y cada minuto se divide en 60 partes iguales, llamadas segundos.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Ejemplo:

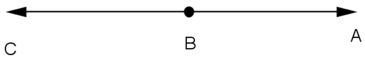
1) $\measuredangle\theta$=18° 20' 15' ← Se lee: El ángulo θ es igual a 18 grados con 20 minutos y 15 segundos.

2)



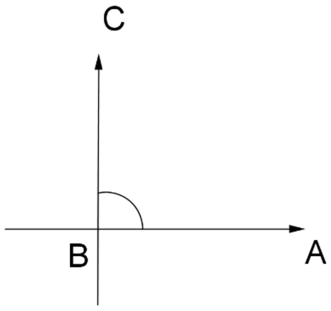
$$\measuredangle ABC = 0°$$

3)



$$\measuredangle ABC = \frac{360°}{2}$$
$$= 180°$$

4)

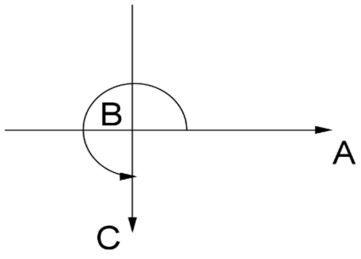


$$\measuredangle ABC = \frac{3(360°)}{4}$$
$$\measuredangle ABC = 90°$$

Al ángulo de 90° se le llama ángulo recto

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

5)



$$\measuredangle ABC = \frac{3(360°)}{4}$$

$$\measuredangle ABC = 270°$$

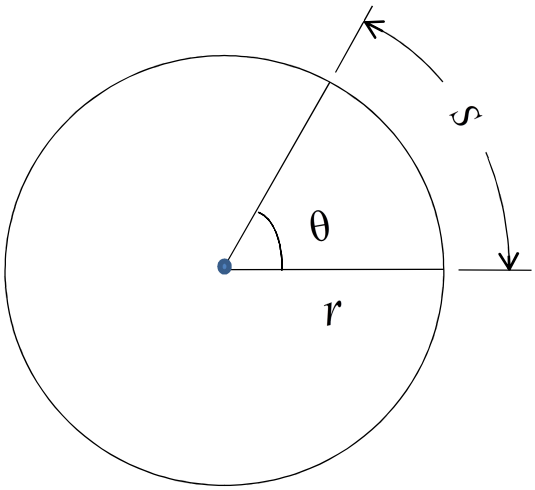
6)

SISTEMA CIRCULAR

En este sistema para medir ángulos se toma como unidad de medida el *Radián*

RADIÁN

Un radián es el ángulo cuyos lados comprenden un arco cuya longitud es igual al radio.



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

El ángulo θ tendrá la medida de un radián cuando el arco sea igual al radio.

Sí el arco es el doble del radio, entonces θ tendrá por medida 2 radianes, o sea que

$$\theta = \frac{S}{r}$$

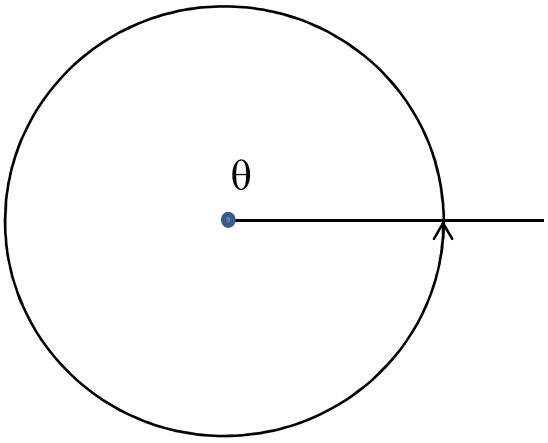
Para medir el arco (S) y el radio (r) se utiliza la misma unidad de medida por lo que el radián es adimensional.

Si se conoce el valor del ángulo θ, en ***radianes***, y la longitud del radio, se puede calcular la longitud del arco, así:

$$\theta = \frac{S}{r} \quad \rightarrow \quad S = \theta r$$

Ejemplo. Calcular el valor , en radianes del ángulo de una vuelta .

Solución



$\theta = \frac{S}{r}$ pero para una vuelta $S = 2\pi r,$ por lo tanto

$\theta = \frac{2\pi r}{r}$, $\theta = 2\pi$ radiandes.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

El ángulo de una vuelta es igual a 2π radianes y también es igual a 360^o. Por lo tanto

$360^o = 2\pi$

$180^o = \pi$

$\frac{180^o}{\pi} = 1$ ó $\frac{\pi}{180^o} = 1$

Ejemplo. Exprese en radianes.

1) 30^o

Solución

$30^o = 30^o(1)$

$= 30^o\left(\frac{\pi}{180^o}\right)$

$30^o = \frac{\pi}{6}$

2) 45^o

Solución

$45^o = 45^o(1)$

$= 45^o\left(\frac{\pi}{180^o}\right)$

$45^o = \frac{\pi}{4}$

Ejemplo. Exprese en grados sexagesimales.

1) $\frac{\pi}{3}$

Solución

$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(1)$

$= \frac{\pi}{3}\left(\frac{180^o}{\pi}\right)$

$\frac{\pi}{3} = 60^o$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

2) $\frac{\pi}{2}$

Solución

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}(1)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{180^o}{\pi}\right)$$

$$\frac{\pi}{2}=90^o$$

Cuando no se especifica la unidad angular se entiende que el ángulo está en radianes.

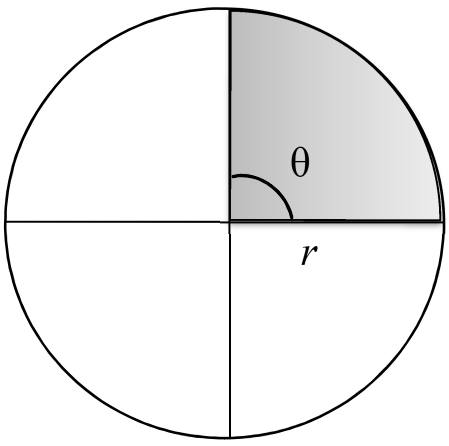
En su calculadora los grados sexagesimales se simbolizan por "Deg" o "D" y los radianes por "Rad" o "R".

El área del sector circular viene dado por

$$A=\frac{1}{2}(S)r \quad \text{y} \quad S=\theta r \quad \text{entonces} \quad A=\frac{1}{2}(\theta r)r$$

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\theta r^2}, \quad \theta \text{ en radianes}$$

Ejemplo. Calcular el área.



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$r = 2m$

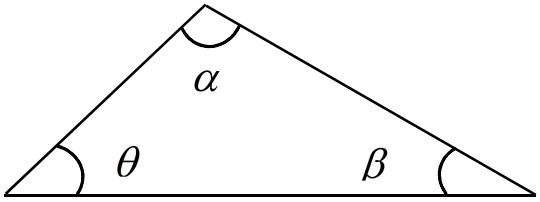
$\theta = \frac{\pi}{2}$

$A = \frac{1}{2}\theta r^2$

$A = \frac{1}{2}\left(\pi/2\right)(2m)^2$

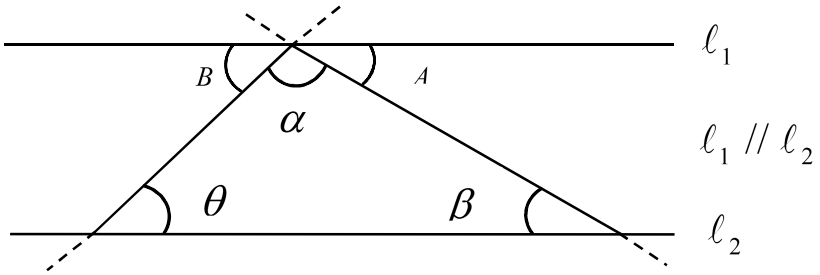
$A = \pi m^2$

Ejercicio. Calcular la suma de los ángulos internos de un triángulo



$¿\measuredangle\theta + \measuredangle\beta + \measuredangle\alpha?$

Solución



$\left.\begin{array}{l}\measuredangle B = \measuredangle\theta \\ \measuredangle A = \measuredangle\beta\end{array}\right\}$ *alternos* internos

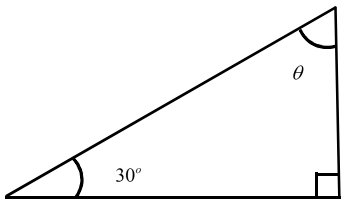
$\measuredangle A + \measuredangle\alpha + \measuredangle B = 180^o$

$\boxed{\measuredangle\beta + \measuredangle\alpha + \measuredangle\theta = 180^o}$

En todo triángulo la suma de los ángulos internos es igual a 180^o ó π radianes

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Ejemplo. Calcular el valor del ángulo θ



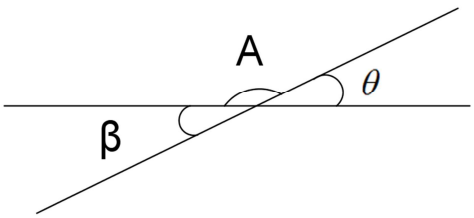
Solución

$30^o + \theta + 90^o = 180^o$

$\theta = 180^o - 90^o - 30^o$

$\theta = 60^o$

ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE



$\measuredangle\ \theta$ es opuesto por el vértice al $\measuredangle \beta$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$\measuredangle\theta + \measuredangle A = 180°$ 1)

$\measuredangle\beta + \measuredangle A = 180°$ 2)

De 1) $\measuredangle A = 180° - \measuredangle\theta$ 3)

Sustituyendo 3) en 2)

$\measuredangle\beta + (180° - \measuredangle\theta) = 180°$

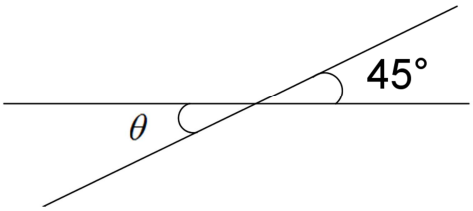
$\measuredangle\beta = 180° - (180° - \measuredangle\theta)$

$\measuredangle\beta = 180° - 180° + \measuredangle\theta$

$\measuredangle\beta = \measuredangle\theta$

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales!!

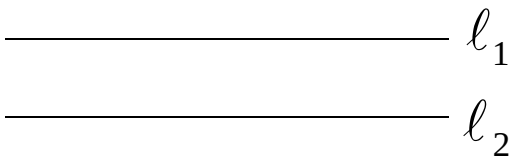
Ejemplo. Calcule el valor del ángulo θ



$\measuredangle\theta = 45°$, por ser opuesto al ángulo de 45° por el vértice

RECTAS PARALELAS

Dos rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano, no tienen ningún punto común.

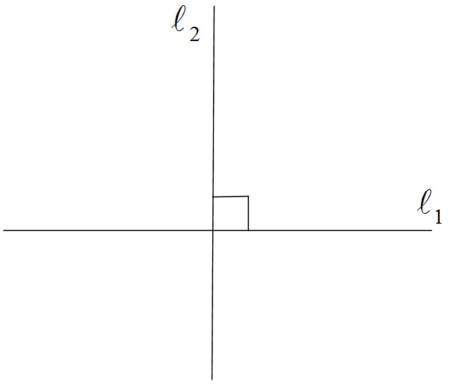


$\ell_1 \parallel \ell_2$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

RECTAS PERPENDICULARES

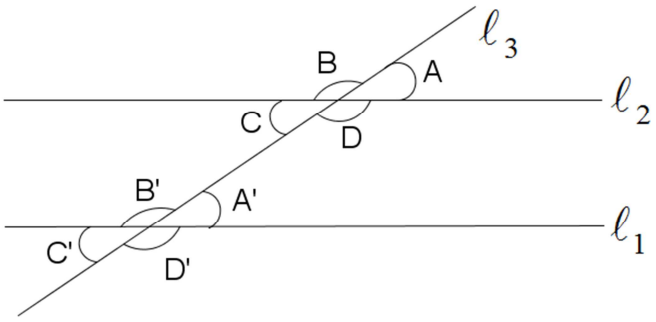
Dos rectas son perpendiculares cuando se cortan en ángulo recto (90°)



$\ell_1 \perp \ell_2$

PARALELAS CORTADAS POR UNA RECTA SECANTE

Dos rectas paralelas cortadas por una recta secante (toda recta que corta una figura) forman ocho ángulos:



$\ell_1 // \ell_2$

ℓ_3 : Recta secante

Al desplazar la recta ℓ_1 (paralela a ℓ_2) hacia ℓ_2 y que

$\measuredangle A'$ coincide con $\measuredangle A$

$\measuredangle B'$ " " $\measuredangle B$

$\measuredangle C'$ " " $\measuredangle C$

$\measuredangle D'$ " " $\measuredangle D$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Por lo tanto a los ángulos: $\measuredangle A'$ y $\measuredangle A$, $\measuredangle B'$ y $\measuredangle B$, $\measuredangle C'$ y $\measuredangle C$, $\measuredangle D'$ y $\measuredangle D$ Se les llama ángulos correspondientes, y $\measuredangle A' = \measuredangle A$, $\measuredangle B' = \measuredangle B$, $\measuredangle C' = \measuredangle C$, $\measuredangle D' = \measuredangle C$.

A los ángulos: C, D, B' y A' se les llama ángulos internos, y a los ángulos A, B, C' $\wedge$ D' se les llama ángulos externos.

Los ángulos: D y B'; C y A' se conocen como alternos internos, y los ángulos: A y C', B y D' se conocen como alternos externos.

Se observa que $\measuredangle A'$ es igual al $\measuredangle A$, por ser correspondientes y el $\measuredangle A$ es igual al $\measuredangle C$ por ser opuesto por el vertice, entonces $\measuredangle A'$ es igual al $\measuredangle C$.
De igual forma se puede probar que $\measuredangle D = \measuredangle B'$

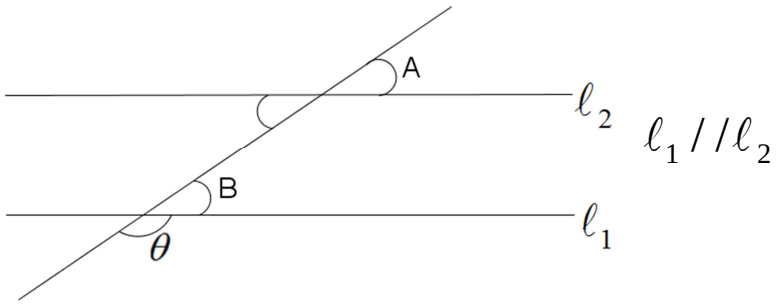
"Los ángulos alternos internos son iguales"

Además:

$\measuredangle A = \measuredangle C'$
$\measuredangle B = \measuredangle D'$

"Los ángulos alternos externos son iguales"

Ejemplo: Calcule el valor del ángulo θ.



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Solución:

$\measuredangle B = 60°$ por ser alternos internos

$\measuredangle \theta + 60° = 180°$

$\measuredangle \theta = 180° - 60°$

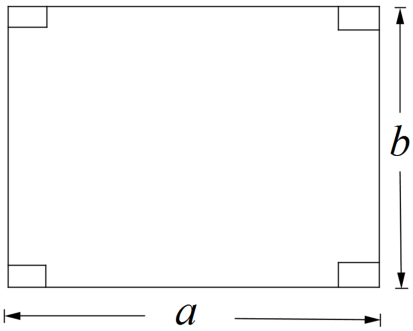
$\measuredangle \theta = 120°$

PERÍMETROS (P)

Es la medida de un contorno.

Ejemplo:

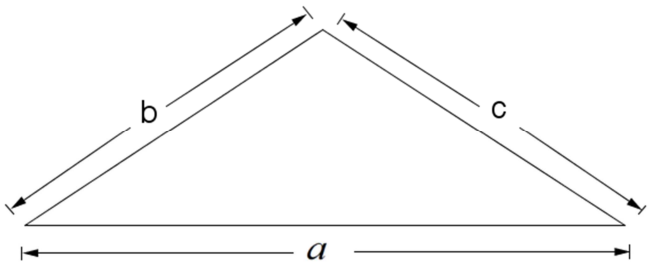
1) RECTÁNGULO



$$P = a + b + a + b$$

$$P = 2a + 2b$$

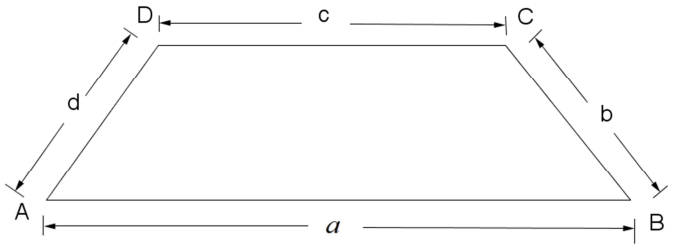
2) TRIÁNGULO



$$P = a + b + c$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

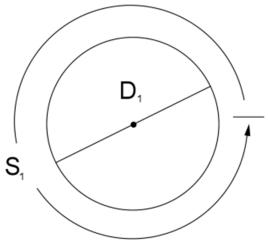
3) TRAPECIO



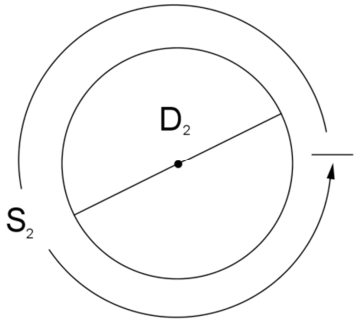
$\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$

$P = a + b + c + d$

4) Para determinar una fórmula para el perímetro del círculo se le invita a realizar la siguiente experiencia:
Dibuje tres circunferencias (con un compás) y en cada una (con una cinta métrica, de las que usa un sastre) mida el contorno (S) y el diámetro (D), luego con una calculadora calcule el cociente (S/D).

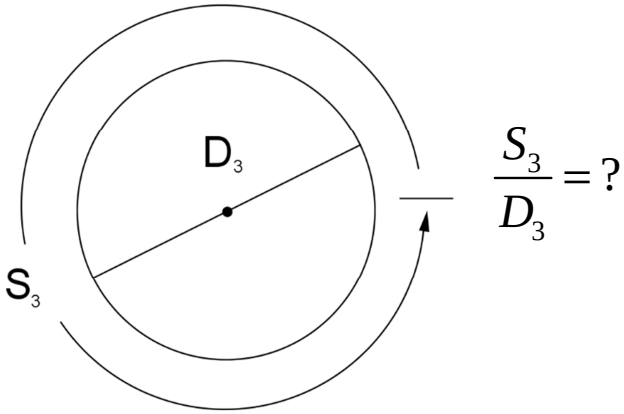


$\frac{S_1}{D_1} = ?$



$\frac{S_2}{D_2} = ?$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013



Observará que el resultado de dividir la longitud del contorno del círculo (perímetro) entre la longitud del diámetro (en los tres casos) es casi el mismo valor (no resulta el mismo valor, posiblemente por los errores cometidos al medir). Por lo tanto concluimos que el cociente S/D es independiente del tamaño del círculo, y que si las mediciones fueran exactas, dicho cociente sería igual al número π $(\pi \cong 3.1416)$

$\frac{S}{D} = \pi,$ pero el diámetro es el doble del radio, o sea, $D = 2r$

$\frac{S}{2r} = \pi \Rightarrow \boxed{S = 2\pi r}$

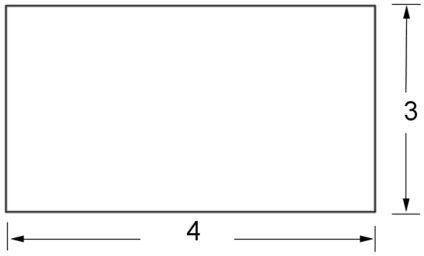
El perímetro de un círculo (longitud de la circunferencia) se calcula multiplicando 2π por la longitud del radio o multiplicando π por la longitud del diámetro.

$\boxed{S = 2\pi r}$ ó $\boxed{S = \pi D}$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

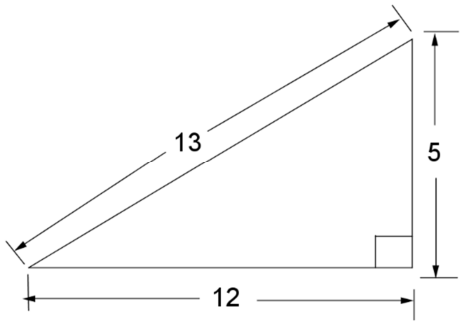
Ejemplo calcule el perímetro (con la misma cinta métrica se han medida las longitudes y los dibujos no están a escala):

1)



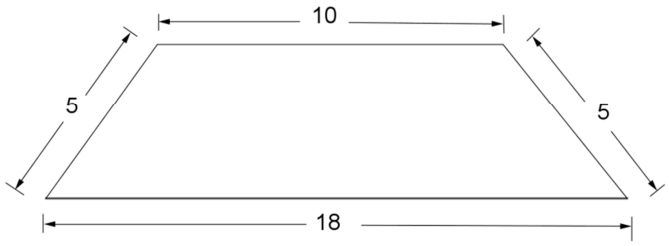
$$P = 4+3+4+3$$
$$P = 14$$

2)



$$P = 12+5+13$$
$$P = 30$$

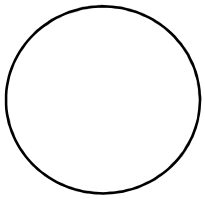
3)



$$P = 18+5+10+5 \rightarrow P = 38$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

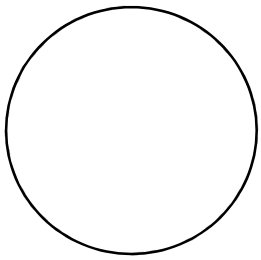
4)



$D = 4$

$P = \pi D \rightarrow \ P = 4\pi$

5)



$r = 3$

$P = 2\pi r$

$P = 6\pi$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013